



TITLE:

# 線型非マルコフBrown運動と Master方程式

AUTHOR(S):

宗像, 豊哲

---

CITATION:

宗像, 豊哲. 線型非マルコフBrown運動とMaster方程式. 物性研究 1974, 22(2): 121-130

ISSUE DATE:

1974-05-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/88792>

RIGHT:

## 線型非マルコフ Brown 運動と Master 方程式

京大・工 数理工学科

応用力学研究室 宗 像 豊 哲

( 3 月 2 9 日 受 理 )

## § 1. 序 論

Brown 運動の現象論<sup>1)</sup> は Brown 粒子の運動量  $P(t)$  に対する Langevin equation (L. Eq.) を基礎とし, Brown 粒子に作用する random force  $f(t)$  は通常 Gaussian でかつ white noise であると仮定される。この仮定のもとに Master equation (M. Eq.) として二階の微分方程式である Fokker-Planck (F-P Eq.) が導かれる。この classical な stochastic model の精密化あるいは一般化として次の三点が考えられる。

- a) random force  $f(t)$  は non-Gaussian である。
- b)  $f(t)$  の相関時間は finite である。(non-white)。
- c) L. Eq. は  $P(t)$  に関して非線型である。

この小論では Langevin model を b) の方向に沿って一般化した線型非マルコフ Brown 運動を考察する。この model の揺動散逸定理との関係はすでに Kubo<sup>2)</sup> により論じられているが, 我々は b) の一般化にともない M. Eq. が F-P Eq. からどのように変形されるかを調べる。この為に Mori et al.<sup>3)</sup> による M. Eq. の exact な  $\delta$ -展開公式と線型非マルコフ Brown 運動に対する semidynamical な stochastic model を用いた。質量比  $\delta$  ( $\equiv m/M$ ,  $m, M$  は熱浴粒子及び Brown 粒子の質量) の巾展開の形で我々は  $t \gg \tau_c$  の所でなりたつマルコフな無限階の M. Eq. を導いた。ここに  $\tau_c$  は b) で述べた random force の相関時間である。この Long time Markoffian M. Eq. は recurrent form で求まり Mori et al.<sup>3)</sup> により導出されたマルコフな M. Eq. と異なった構造を持っており, 又  $\delta \rightarrow 0$ ,  $\tau_c \rightarrow 0$ ,  $\delta/\tau_c = \zeta$ ; const. のもとで F-P Eq. に帰着する。

§ 2 で線型非マルコフ Brown 運動の stochastic model を定め, § 3 で Long time

宗像豊哲

M. Eq. を導出する。§ 4 において運動量時間相関々数を Long time M. Eq 及び L. Eq. から求め一致することを示す。§ 5 において exact な非マルコフ M. Eq. のマルコフ化について若干のコメントを行う。

## § 2. 線型非マルコフ Brown 運動

簡単の為一次元自由ブラウン運動を考える。現象論における Langevin 方程式及び F-P Eq. に対応する microscopic な方程式は非線型揺動の一般論<sup>4)</sup> 及び M. Eq. の  $\delta$  展開公式<sup>3)</sup>を用いて次の様に与えられる。

Microscopic Langevin Eq.<sup>4)</sup>

$$\frac{d}{dt} p(t) = \int_0^t \zeta(p(t-s), s) ds + f(t) \quad (2 \cdot 1)$$

ここに

$$\zeta(p, s) = 1/f_0(p) \cdot \frac{\partial}{\partial p} [f_0(p) < f(s) f(0) : p >] \quad (2 \cdot 2)$$

$$f(t) = U(t) (1 - \mathcal{P}) i L p(0) \equiv U(t) f(0) \quad (2 \cdot 3)$$

$$U(t) = \exp[i(1 - \mathcal{P}) L t] \quad (2 \cdot 4)$$

$f_0(p)$  は Maxwell 分布 ( $= \sqrt{\beta/2\pi M} \exp(-\beta p^2/2M)$ ),  $\beta = (kT)^{-1}$ .  $L$  は Liouville 作用素であり,  $\mathcal{P}$  は次で定義される projection 作用素である。

$$\mathcal{P} G(x) \equiv \int G(x') \delta(p' - p) \rho^{eq.}(x') dx' / f_0(p) \equiv < G; p > \quad (2 \cdot 5)$$

ここに  $\rho^{eq.}$  はカノニカル分布である。 $< i L p; p > = 0$  より  $f(0) = i L p(0)$ , すなわち  $f(0)$  は熱浴粒子の Brown 粒子に及ぼす力である。

Microscopic Master Eq.<sup>3)</sup>

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f(p, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{\partial}{\partial p} \right)^{n+1} f_0(p) \int ds < f(0) S_{n+1}(s); p > \frac{\partial}{\partial p} (f(p, t-s) / f_0(p)) \\ &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} D_n f(p, t) \end{aligned} \quad (2 \cdot 6)$$

ここに

$$S_{n+1}(t) = \int_0^t dt_1 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n U(t-t_1) \mathcal{D}' f(0) \cdots U(t_{n-1}-t_n) \mathcal{D}' f(0) U(t_n) \mathcal{D}' f(0) \quad (2 \cdot 7)$$

であり,  $\mathcal{D}' \equiv 1 - \mathcal{D}$  である。

線型非マルコフな Brown 運動を (2・1) の右辺にあらわれる  $f(t)$  に関して次の仮定を置く事により定義する。

1) 線型性  $f(t)$  は  $p$  に独立である。故に

$$f(t) \equiv \exp i (1 - \mathcal{D}) L_0 t \cdot f(0) = \exp i L_0 t \cdot f(0) \quad (2 \cdot 8)$$

ここに  $L_0$  は Brown 粒子を fix した時の Liouville 作用素である。 $f(t)$  は  $p$  を含まないから (2・1) と (2・2) より L. Eq. (2・1) は  $p$  について線型であり, 又  $\langle f(t); p \rangle = \langle f(t) \rangle = 0$ , 但し  $\langle G \rangle \equiv \int G \rho^{eq} dx$ .

2) 非マルコフ性  $f(t)$  は系が初期にカノニカル分布を時つとき Gaussian であり,

$$\langle f(t) f(0) \rangle = \langle f^2 \rangle \exp(-t/\tau_c) \quad (2 \cdot 9)$$

$$\langle f^2 \rangle = mk T / (\tau_c)^2 \quad (2 \cdot 10)$$

$m$  は熱浴粒子の質量である。一般に質量  $m$  の粒子からなる多粒子系においては

$$\langle f^2 \rangle = mk T \langle \omega^2 \rangle_{av} \quad (2 \cdot 11)$$

ここに  $\langle \omega^2 \rangle_{av} \equiv \int_0^\infty f(\omega) \omega^2 d\omega$  であり,  $f(\omega)$  は frequency spectrum

$$f(\omega) \equiv \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos \omega t \cdot \langle p^2 \rangle^{-1} \langle p(t) p(0) \rangle dt \quad (2 \cdot 12)$$

である。<sup>5)</sup> Brown 粒子と熱浴粒子の間の相互作用と熱浴粒子間の相互作用を等しいと考え, かつ Brown 粒子を含む系の microscopic な characteristic time  $\tau_c$  として  $1/\sqrt{\langle \omega^2 \rangle_{av}}$  をとると<sup>5)6)</sup> 仮定 2) が導かれる。線型非マルコフ Brown 運動に対するこの “stochastic” model に対しては以下で示すように (2・6) 式から長時間のところとなりたつマルコフな M. Eq. を質量比  $\delta (= m/M)$  の巾展開として closed form で求めることが出来る。

### § 3. Long Time Master Equation

M. Eq. (2.6) の右辺の long time behavior ( $t \gtrsim t_r \equiv \tau_c/\delta$ ) を § 2 で指定したモデルについて調べる。  $t_r = \tau_c/\delta$  は Brown 粒子の運動量  $\mathbf{p}$  の relaxation time であり以下でみるように  $t \gtrsim 0 (\tau_c/\delta)$  の場合にのみマルコフ的記述が可能になる。時間領域のこの制限のもとに (2.6) の積分の上限を  $t$  から  $\infty$  に変えると、  $e^{-t/\tau_c} e^{-\frac{1}{\delta}}$  のオーダーの誤差が生じるが  $\delta \rightarrow 0$  の時の誤差は  $\delta$  の任意の巾  $\delta^m$  より小さい。  $kT = 1$ ,  $\mathbf{v} \equiv r\mathbf{p}$ ,  $r \equiv \sqrt{M}$  とする。(2.6) において  $f(\mathbf{v}, \mathbf{t}-\mathbf{s})$  を  $f(\mathbf{v}, \mathbf{t})$  で置き替えると、  $n=0$  より

$$\begin{aligned} D_0^{(1)} f(\mathbf{v}, \mathbf{t}) &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} f_0(\mathbf{v}) \int_0^\infty \langle f(\mathbf{0}) f(\mathbf{s}) \rangle d\mathbf{s} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} (f(\mathbf{v}, \mathbf{t}) / f_0(\mathbf{v})) \\ &= \frac{\delta}{\tau_c} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} [\mathbf{v} f + \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} f] \end{aligned} \quad (3.1)$$

ここに  $D_0$  につけた suffix (1) は (3.4) の展開の第一項から生じることを示しており、  
 $f_0(\mathbf{v}) = 1/\sqrt{2\pi} \exp(-v^2/2)$ .  $f(\mathbf{t})$  は  $\mathbf{p}$  に独立であるから  $\langle \mathbf{f}(\mathbf{t}) \mathbf{f}(\mathbf{0}) ; \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{f}(\mathbf{t}) \mathbf{f}(\mathbf{0}) \rangle$ , 又  $\mathcal{D}' = 1 - \mathcal{D} = 1 - \mathcal{D}$  は  $\mathbf{p}$  に独立な力学量  $G$  に作用する時

$$\mathcal{D}' G = (1 - \mathcal{D}) G = G - \langle G \rangle \quad (3.2)$$

となる。 $\mathbf{f}(\mathbf{t})$  は Gaussian で  $\langle \mathbf{f}(\mathbf{t}) \rangle = 0$  だから  $n$  が奇数の  $D_n f(\mathbf{v}, \mathbf{t})$  は常に零になる。 $n = 2$  から  $f(\mathbf{v}, \mathbf{t}-\mathbf{s}) \rightarrow f(\mathbf{v}, \mathbf{t})$  により

$$D_2^{(1)} f(\mathbf{v}, \mathbf{t}) = \delta^2/\tau_c \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right)^2 f_0(\mathbf{v}) \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) \{ f(\mathbf{v}, \mathbf{t}) / f_0(\mathbf{v}) \} \quad (3.3)$$

一方  $f(\mathbf{v}, \mathbf{t}-\mathbf{s})$  を  $\mathbf{t}$  のまわりで Taylor 展開して

$$f(\mathbf{v}, \mathbf{t}-\mathbf{s}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mathbf{s})^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \mathbf{t}^n} f(\mathbf{v}, \mathbf{t}) \quad (3.4)$$

これを (2.6) に代入すると  $D_0^{(1)}$  に対する  $O(\delta^2)$  の補正が (3.4) の第 2 項と  $D_0$  (2.6) で定義されている) から生じる。

$$\begin{aligned} D_0^{(2)} f(\mathbf{v}, \mathbf{t}) &= -\frac{1}{r^4} \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) f_0(\mathbf{v}) \int_0^\infty \langle f(\mathbf{0}) f(\mathbf{s}) \rangle \mathbf{s} d\mathbf{s} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) \frac{1}{f_0} \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) f_0 \times \\ &\quad \int_0^\infty \langle f(\mathbf{0}) f(\mathbf{s}) \rangle d\mathbf{s} \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) \{ f/f_0 \} \end{aligned}$$

$$= -\frac{\delta^2}{\tau_c} \left( \frac{\partial}{\partial v} \right) f_0 \left( \frac{\partial}{\partial v} \right) f_0^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial v} \right) f_0 \frac{\partial}{\partial v} \left\{ f/f_0 \right\} \quad (3.5)$$

ここで (3.4) の第 2 項の  $\partial f/\partial t$  を (3.1) を用いて表わした。  $D_0^{(2)}$  は  $\tau_c$  の間の  $f(v, t)$  の変化を考慮に入れた時にあらわれ  $D_2^{(1)}$  と  $D_0^{(2)}$  で F-P Eq. (3.1) に対する  $O(\delta^2)$  の補正を与える。この補正は Lebowitz, Rubiw<sup>7)</sup> と一致するが  $\langle f(0) S_{n+1}(s) \rangle \propto \delta(s)$  と仮定した Mori et al.<sup>3)</sup> によるマルコフ化では  $D_0^{(2)}$  はあらわれない。この点は §5 で議論する。

次に (2.6) の  $\delta$  展開の systematic procedure を考える。  $f(t)$  の性質 1) 2) より、  $D_{zn} f(v, t)$  は  $O(\delta^{n+1})$  及び  $\delta$  のより高次の項からなることがある。  $e^{-1/\delta}$  の order の補正を無視して、

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^{n+1} \left[ T_n^0 f + T_n^1 \frac{\partial f}{\partial f} + T_n^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \dots \right] \quad (3.6)$$

ここに  $T_n^\ell$  は

$$T_n^\ell \equiv \frac{1}{m^{n+1}} \left( \frac{\partial}{\partial v} \right)^{2n+1} f_0(v) \int_0^\infty \langle f(0) S_{2n+1}(s) \rangle \frac{(-s)^\ell}{\ell!} ds \cdot \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{f_0} \right) \quad (3.7)$$

で定義される作用素である。次に  $\{L_n^m\}$  を以下で定義する。

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n L_n^1 f \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \delta^{n+1} L_n^2 f \quad (3.9)$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial^m f}{\partial t^m} = \sum_{n=1}^{\infty} \delta^{n+m-1} L_n^m f \quad (3.10)$$

(3.8, 9, 10) を (3.6) に代入すると

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^{n+1} \left[ T_n^0 f + T_n^1 \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n L_n^1 f + T_n^2 \sum_{n=1}^{\infty} \delta^{n+1} L_n^2 f + \dots \right] \quad (3.11)$$

(3.8) と (3.11) の右辺を比べて

$$L_n^1 = \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{\ell=1}^{n-i-1} T_i^\ell L_{n-\ell-i}^\ell + T_{n-1}^0 \quad (3.12)$$

又 (3.8) と (3.9) から

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \delta^{n+1} L_n^2 f = \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n L_n^1 \sum_{m=1}^{\infty} \delta^m L_n^1 f \quad (3 \cdot 13)$$

$\delta$  の order で整理して

$$L_n^2 = \sum_{i+j=n+1} L_i^1 L_j^1 \quad i \geq 1, j \geq 1, \quad (3 \cdot 14)$$

この手続きより一般に

$$L_n^i = \sum_{j_1+\dots+j_i=n+i-1} L_{j_1}^1 L_{j_2}^1 \dots L_{j_i}^1 \quad (3 \cdot 15)$$

(3・12, 15) より

$$L_n^1 = \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{\ell=1}^{n-i-1} T_i^\ell \sum_{j_1+\dots+j_\ell=n-i-1} L_{j_1}^1 L_{j_2}^1 \dots L_{j_\ell}^1 + T_{n-1}^0 \quad (3 \cdot 16)$$

(3・16) から明らかなように  $L_n^1$  は  $\{L_m^1, 1 \leq m \leq n-1\}$  により表わされ, かくして  $L_n^1$  は recurrent に求まっていく。但し  $L_1^1 = T_0^0$ 。(2・8, 9, 10), (3・2, 7) より,

$$T_n^\ell \propto \frac{1}{n^{n+1}} \langle f^2 \rangle^{n+1} (\tau_c)^{2n+1+\ell} = (\tau_c)^{\ell-1}, \quad \text{但し } kT=1.$$

故に  $L_n^1 \propto (1/\tau_c)$  がわかる。かくして  $\tau_c \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0, \delta/\tau_c = \xi; \text{const.}$  の時, 次の F-P Eq. を得る。

の

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \delta T_0^0 f(v, t) = \xi \frac{\partial}{\partial v} [v f + \frac{\partial}{\partial v} f], \quad t > 0 \quad (3 \cdot 17)$$

$$\text{ここに } \xi = \frac{1}{MkT} \int_0^\infty \langle f(t) f(0) \rangle dt = \delta/\tau_c.$$

#### § 4. Momentum Autocorrelation Function

Brown 粒子の運動量時間相関々数  $\phi(t)$  は Langevin 方程式 (2・1) から, 又  $t \gtrless 0$  ( $t_r$ ) に対しては Long time M.Eq. (3・8, 16) から求まる。 $f(t)$  の性質 1) 2) より (2・1) は

$$\frac{d}{dt} p(t) = -\frac{1}{M} \frac{m}{(\tau_c)^2} \int_0^t e^{-s/\tau_c} p(t-s) ds + f(t) \quad (4 \cdot 1)$$

となる。§ 3 におけるように  $\beta = (kT)^{-1} = 1$  とした。 $f(t)$  は  $\delta(p-p_0)$  に直交する

から<sup>4)</sup>,  $t=0$  での  $\mathbf{p}(t)$  の値  $\mathbf{p}_0$  が与えられた時の  $\mathbf{p}(t)$  の平均  $\bar{\mathbf{p}}(t)$  は

$$\frac{d}{dt} \bar{\mathbf{p}}(t) = -\frac{1}{M} \frac{m}{(\tau_c)^2} \int_0^t e^{-s/\tau_c} \bar{\mathbf{p}}(t-s) ds \quad (4.2)$$

を満たす。これを解いて

$$\bar{\mathbf{p}}(t) = \frac{1}{\sqrt{1-4\delta}} \left[ \frac{1+\sqrt{1-4\delta}}{2} e^{-\frac{1-\sqrt{1-4\delta}}{2\tau_c}t} - \frac{1-\sqrt{1-4\delta}}{2} e^{-\frac{1+\sqrt{1-4\delta}}{2\tau_c}t} \right] \mathbf{p}_0 \quad (4.3)$$

$t \gtrsim t_r = \tau_c/\delta$  に対して

$$\bar{\mathbf{p}}(t) = \frac{1}{\sqrt{1-4\delta}} \cdot \frac{1+\sqrt{1-4\delta}}{2} e^{-\frac{1-\sqrt{1-4\delta}}{2\tau_c}t} \mathbf{p}_0 + o(e^{-1/\delta})$$

故に

$$\frac{d}{dt} \bar{\mathbf{p}}(t) = -\frac{1-\sqrt{1-4\delta}}{2\tau_c} \bar{\mathbf{p}}(t) + o(e^{-1/\delta}) \quad (4.4)$$

$\phi(t)$  は  $\bar{\mathbf{p}}(t)/\mathbf{p}_0 \cdot \langle p_0^2 \rangle = M \bar{\mathbf{p}}(t)/\mathbf{p}_0$  で与えられる。

次に M. Eq. (3.8, 16) を用いて  $t \gtrsim t_r$  での  $\bar{\mathbf{v}}(t) = \int \mathbf{v}(\mathbf{v}, t) d\mathbf{v}$  を求めよう。

(3.8) より

$$\frac{d}{dt} \bar{\mathbf{v}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n \int \mathbf{v} L_n^1 f(\mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \quad (4.5)$$

ここで  $e^{-1/\delta}$  の order の補正項は省略してある。§3 で示したように  $L_n^1$  は  $\{T_\ell^m\}$  の積の和であらわされる。これを (4.5) に代入し  $\mathbf{v}$ -space での積分を行うと、部分積分により  $T_\ell^m$  ( $\ell \neq 0$ ) を含む項は寄与しない事が (3.7) よりわかる。そこで作用素  $M_n$  を  $L_n^1 = L_n^1(\{T_\ell^m\})$  において  $T_\ell^m$  ( $\ell \neq 0$ ) = 0 をおいて得られる作用素で定義する。(4.5), (3.12) を用いて,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \bar{\mathbf{v}}(t) &= \int \mathbf{v} \left[ \delta T_0^0 + \sum_{n=2}^{\infty} \delta^n \sum_{\ell=1}^{n-1} T_0^\ell \sum_{j_1+\dots+j_\ell=n-1} M_{j_1} \dots M_{j_\ell} \right] f(\mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \\ &= \int \mathbf{v} \left[ \delta T_0^0 + \sum_{n=2}^{\infty} \delta^n T_0^0 \sum_{\ell=1}^{n-1} (-\tau_c)^\ell \sum_{j_1+\dots+j_\ell=n-1} M_{j_1} \dots M_{j_\ell} \right] f(\mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \quad (4.6) \end{aligned}$$

ここで  $T_0^\ell = (-\tau_c)^\ell T_0^0$  を用いた。母関数  $m(z)$  を

$$m(z) = \sum_{n=1}^{\infty} M_n z^n \quad (4.7)$$



宗像豊哲

で定義する。  $M_1 = T_0^0$  ,  $n \geq 2$  に対して (4・6, 7) より

$$M_n = T_0^0 \sum_{\ell=1}^{n-1} (-\tau_c)^\ell \frac{1}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}} [m(z)]^\ell \Big|_{z=0} \quad (4 \cdot 8)$$

がなりたつ。(4・7, 8) より

$$\begin{aligned} m(z) &= T_0^0 z + \sum_{n=2}^{\infty} T_0^0 \frac{1}{(n-1)!} \left[ \frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}} \sum_{\ell=1}^{n-1} (-\tau_c m(z))^\ell \right]_{z=0} z^n \\ &= T_0^0 z (1 + \tau_c m(z))^{-1} \end{aligned} \quad (4 \cdot 9)$$

故に  $m(0) = 0$  を用いて

$$m(z) = (-1 + \sqrt{1 + 4\tau_c z T_0^0}) / 2\tau_c \quad (4 \cdot 10)$$

$T_0^0$  の adjoint 作用素  $A_0$  を  $\int f T_0^0 g dv = \int g A_0 f dv$  で定義すると

$$A_0 = -1/\tau_c \cdot \left[ \frac{\partial^2}{\partial v^2} - v \frac{\partial}{\partial v} \right] \quad (4 \cdot 11)$$

$v$  は  $A_0$  の固有ベクトルである事を用いて

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \bar{v}(t) &= \int v m(\delta) f(v, t) dv \\ &= \int f(v, t) \cdot \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\tau_c \delta A_0}}{2\tau_c} v dv = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4\delta}}{2\tau_c} \bar{v}(t) \end{aligned} \quad (4 \cdot 12)$$

$\bar{p}(t) = r^{-1} \bar{v}(t)$  から,  $t \gtrsim t_r$  の時

$$\frac{d}{dt} \bar{p}(t) = -(1 - \sqrt{1 - 4\delta}) / 2\tau_c \bar{p}(t) + O(e^{-1/\delta}) \quad (4 \cdot 13)$$

(4・4) と (4・13) から Long time M. Eq. (3・8, 16) より求まる  $p(t)$  あるいは  $\phi$  の  $t \gtrsim t_r$  での振るまいは Langevin Eq. (2・1) からえられるものと  $O(e^{-1/\delta})$  の誤差を除いて一致することがわかる。一般に Langevin Eq. (2・1) と M. Eq. (2・6) は dynamical model を扱う場合においてのみ equivalent であるが, 上に示した結果は我々の Long time M. Eq. の validity に保障を与えられと考えられる。

## § 5. 結 び

classical な Brown 運動論を非マルコフに拡張した線型非マルコフな Brown 運動に対して, Longtime Markoffian M. Eq. を導出した。この方程式は recurrent form で求まり, このことは非マルコフな exact M. Eq. からマルコフな M. Eq. を  $t \gg \tau_c$  で導出する際に他にも見うけられる。<sup>8)</sup> Mori et al.<sup>3)</sup> によるマルコフ化では (2.6) より

$$\frac{\partial}{\partial t} f(p, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\partial}{\partial t}^{n+1} f_0(p) \int_0^{\infty} ds \langle f(0) S_{n+1}(s); p \rangle \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{f(p, t)}{f_0(p)} \right\} \quad (5.1)$$

が得られる。すなわち random force の相関々数  $\langle f(0) S_{n+1}(s); p \rangle$  は Dirac の  $\delta$  関数に比例すると仮定されている。small parameter  $\delta$  は Macro 変数  $A$  を用いて  $\delta = 0 (\text{\AA})$  とあらわせるが, non-dimension な形であらわすと  $\delta = \tau_c / \tau_r$  となる。ここに  $\tau_c$  は random force の相関時間をあらわし系の microscopic characteristic time の order であり  $\tau_r$  は macro 変数の relaxation time である。M. Eq の  $\delta$  展開を行う場合,  $\tau_c$  は  $\tau_r$  に比べて十分小さいが, finite な量であり  $\tau_c$  の時間での  $f(p, t)$  の変化を考慮に入れる必要が生じる。このことから  $f(p, t-s)$  を  $\sum_{n=0}^{\infty} (-s)^n / n! (\partial^n / \partial t^n) f(p, t)$  とあらわしこれを (2.6) に代入して右辺を  $\delta$  の order で整理することが必要になった。

この小論では Brown 運動の簡単な stochastic model を考察したが, 一般の場合にも同様の手続きが必要であると思われる。

以上述べた結果を導くのに random force  $f(t)$  の Gauss 性は不必要である。

§ 3 で述べた  $D_n f = 0$  for  $n: \text{odd}$  は対称性より導かれる。

## 参 考 文 献

- 1) M. C. Wang and G. E. Uhlenbeck, Rev. Mod. Phys. 17 (1945), 323.
- 2) R. Kubo, in "Many-Body Theory" (W. A. Benjamin, Inc. 1966).
- 3) H. Mori, H. Fujisaka and H. Shigematsu, Prog. Theor. Phys. 51 (1974), 109.
- 4) H. Mori and H. Fujisaka, Prog. Theor. Phys. 49 (1973), 764.
- 5) K. S. Singwi and M. P. Tosi, Phys. Rev. 157 (1967), 153.
- 6) A. Rahman, J. Chem. Phys. 45 (1966), 2585.

宗像豐哲

- 7) J. L. Lebowitz and E. Rubin, Phys. Rev. 131 (1963), 2381.
- 8) P. Resibois ; in "Physics of Many-Particle Systems" vol. 1.